

河川の汚染負荷の検知と水質推定へのシステム工学的アプローチ

大 住 晃

本稿では、河川のBODとDOの推定と水質事故などによる汚染負荷の発生場所の特定とその量の同定を、水質方程式を状態空間表現することによってカルマンフィルタで実行するアプローチについて述べる。
キーワード：水質方程式、カルマンフィルタ、水質の推定、水質事故の特定と同定

1. はじめに

近年地球温暖化が進み、それに伴って地球規模での環境汚染に対する対策が求められている。将来石油が枯渇し、人類にとって貴重な食料までもがその代替に利用されようとしている。その結果食糧危機が引き起こされ、それに続いて生物にとって欠かすことのできない水の確保が世界的に求められてくるといわれている。湖や河川の水質も近年何らかの原因により汚染されつつあり、極端な状況では飲料はおろか生命も棲めない環境に陥ってしまいかねない。

そのためには湖や河川の水質の汚染の管理とその対策（制御）が必要不可欠であろう。時あたかも昨年12月第1回アジア・太平洋水サミットが大分県別府市で開催され、水にかかわる環境問題や災害被害などの課題について話し合われている。

このような背景のもとで、筆者は上述のような汚染水質に対して何らかのシステム工学的なアプローチが試みられないかと模索していたところ、河川の水質がどのような状態にあるのかを離散的な地点で計測したBOD（生物化学的酸素要求量）とDO（溶存酸素量）のデータから、河川の流れ方向に沿って全体的にどのような分布になっているかを推定すること、さらに河川の汚染状況からどこの地点で、どのような量の汚染が行われたのかを同定する問題がシステム工学的に解決できるはずだと確信し、研究を行った。本稿ではその概要を述べる。より詳細な内容は文献1)～3)を参照されたい。

2. 水質の数理モデル

いうまでもなく、システム工学的アプローチをとる

ためには、対象とするシステムの数理モデル（ダイナミクス）が必要である。河川の水質については、BODとDOを指標とするStreeter-Phelpsモデルがよく知られているが、筆者は拡散項をも考慮したGundelach-Castilloのモデル⁴⁾を採用して議論した。

$L(x)$ [mg/l] を河川の流下地点 x (> 0) におけるBODの量、 $D(x)$ [mg/l] をDOの飽和値 DO_{sat} からの不足量 ($D(x) = DO_{sat} - DO$ 値) とすると、それは流水が等速で定常状態にあるという仮定のもとで次のような水質方程式と呼ばれる連立微分方程式によってその形状が記述される。

$$\frac{d^2 L(x)}{dx^2} - \frac{U}{\varepsilon} \frac{dL(x)}{dx} - \frac{k_1}{\varepsilon} L(x) - \frac{k_3}{\varepsilon} L(x) + \frac{1}{\varepsilon} p = 0, \quad L(0) = L_0 \quad (1)$$

$$\frac{d^2 D(x)}{dx^2} - \frac{U}{\varepsilon} \frac{dD(x)}{dx} - \frac{k_2}{\varepsilon} D(x) - \frac{a}{\varepsilon} + \frac{k_1}{\varepsilon} L(x) = 0, \quad D(0) = D_0 \quad (2)$$

ここで、 U は河川の流速 [km/day]、 ε は移流拡散係数 [km²/day]、 k_1 、 k_2 、 k_3 はそれぞれ脱酸素係数、再曝気係数および沈降や吸着などによるBOD除去係数 [1/day]、 a は水中の藻や植物の光合成による酸素増加量 [mg/l/day] である。また (1) 式中の p (const.) はBODに対する負荷量（汚染物質の量）である。

(1)、(2) 式はいずれも非同次2階線形微分方程式であるが、それぞれの式に対する特性方程式を求めるといずれも負と正の2つの実根をもつことがわかる。したがって、それらの解は $x \rightarrow \infty$ で発散することにな

るが、現実にはそのような現象は河川では起こり得ないことから自然境界条件を考慮して不安定根を捨て去るとそれらの解はつぎのように求まる。

$$L(x) = L_0 e^{J_1 x} + \frac{p}{k_0} (1 - e^{J_1 x}) \quad (3)$$

$$D(x) = D_0 e^{J_2 x} + \frac{k_1}{k_2 - k_0} L_0 (e^{J_1 x} - e^{J_2 x}) - \frac{a}{k_2} (1 - e^{J_2 x}) + \frac{k_1}{k_2 - k_0} p \left\{ \frac{1}{k_0} (1 - e^{J_1 x}) - \frac{1}{k_2} (1 - e^{J_2 x}) \right\} \quad (4)$$

ただし、 $k_0 = k_1 + k_3$ であり、 J_1, J_2 はそれぞれ (1), (2) 式の同次方程式に対する特性方程式の負根である。

システム工学（特にシステム制御理論）では対象とする状態量（ここでは $L(x)$ と $D(x)$ ）に関するダイナミクスを必要とする。(3), (4) 式をそれぞれ x について微分すればそれらが得られるが、現実にはダイナミクスには不規則外乱の介入は避けられない。そこで、そのことを反映するために (1), (2) 式の左辺にそれぞれ $g_1 \gamma_1(x)$, $g_2 \gamma_2(x)$ という不規則外乱項を加えることにする。 $\gamma_1(x)$, $\gamma_2(x)$ は平均零の正規性白色雑音であり、 g_1, g_2 は係数である。このようなモデルから出発すれば (3), (4) 式を得たのと同様の議論を通して、つぎのような不規則雑音項を含んだモデルが得られる。

$$\frac{dL(x)}{dx} = J_1 L(x) - \frac{1}{k_0} J_1 p(x) - \frac{1}{k_0} J_1 g_1 \gamma_1(x) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{dD(x)}{dx} = & J_2 D(x) + \frac{k_1}{k_2 - k_0} (J_1 - J_2) L(x) \\ & + \frac{1}{k_2} J_2 a - \frac{k_1}{k_2 - k_0} \left(\frac{1}{k_0} J_1 - \frac{1}{k_2} J_2 \right) p(x) \\ & - \frac{k_1}{k_2 - k_0} \left(\frac{1}{k_0} J_1 - \frac{1}{k_2} J_2 \right) g_1 \gamma_1(x) \\ & - \frac{1}{k_2} J_2 g_2 \gamma_2(x) \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、(5), (6) 式において雑音項と拡散項を無視すれば ($g_1 = g_2 = 0$, $\varepsilon = 0$)、これらは Camp によって与えられた水質モデルに、またさらに $a = k_3 = 0$, $p \equiv 0$ とすれば古典的な Streeter-Phelps モデルに帰着する。

(5), (6) 式は連立方程式であるので 2 次元ベクトル $z(x) = [L(x), D(x)]^T$ (T はベクトルの転置を表す) を定義すると、水質方程式の状態空間表現を得る。

$$\frac{dz(x)}{dx} = Az(x) + b_1 + b_2 p(x) + G\gamma(x) \quad (7)$$

ここで、 $\gamma(x) = [\gamma_1(x), \gamma_2(x)]^T$ であり、また A, G は 2 次元マトリクス、 b_1, b_2 は 2 次元ベクトルである。汚染負荷は一定値と仮定しているが、次章で述べるように、それは当然全流域にわたって介入するわけではなく場所の関数になることから、(5)~(7) では p に代わって $p(x)$ と記述している。

(7) 式は $L(x)$ と $D(x)$ をひとつのダイナミクスに表現したもので、流下方向 x に連続的にどのように変化しているかを表現する式になっている。しかし、われわれは $L(x)$ と $D(x)$ を流域全体にわたって観測データとして得ているわけではないので、それらの実際の様子にはわからない。したがって、それらの様子がないかのように観測（測定）データから推定しなければならない。そこで、流下地点 $0 \equiv x_0 < x_1 < x_2 < \dots$ において、BOD と DO に関するデータ $y_L(x_k)$, $y_D(x_k)$ を得るものとして、 $y(\cdot) = [y_L(\cdot), y_D(\cdot)]^T$ を 2 次元観測量ベクトルとすると、それは

$$y(x_k) = Hz(x_k) + v(x_k) \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (8)$$

と表現される。ここで、 $H = \begin{bmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{bmatrix}$ ($h_1, h_2 : \text{const.}$)

であり、 $\{v(\cdot)\}$ は 2 次元観測雑音で平均零の正規性白色雑音系列とする。

もし汚染負荷量 $p(x)$ が既知であるなら、(8) 式で得られる観測データ $\{y(x_k)\}_{k=1,2,\dots}$ より流下方向全域にわたる $L(x)$ と $D(x)$ の推定値はカルマンフィルタ^{5,6)} によって容易に得られるが、実際には $p(x)$ が既知でないことからそれは不可能である。

3. 汚染負荷流入の検知とその地点の特定

水質事故や不法投棄などを数学的に表現することが必要となる。不測の水質事故などの発生によりほとんど 1 点とみなせる場所において負荷を受けるポイント負荷と農業排水などのようにある程度の流域幅をもつノンポイント負荷に対して、筆者は次のような 2 つの数学モデルを考えた。前者は地点 x_m において大きさ $p_0(\text{const.})$ の負荷を受けるとすると、ディラックのデルタ関数 $\delta(\cdot)$ を用いて

$$p(x) = p_0 \delta(x - x_{in}) \quad (9)$$

によって、また後者は区間 $[x_{in}, x_{out}]$ において一定の負荷 p_0 を受けるとすると、単位階段関数 $u_S(\cdot)$ を用いて

$$p(x) = p_0 \{u_S(x - x_{in}) - u_S(x - x_{out})\} \quad (10)$$

によってモデル化する。現実問題として、 x_{in} , x_{out} および p_0 は未知であり、これらを (8) 式のように得られる観測値 $\{y(x_k)\}_{k=1,2,\dots}$ から同定しなければならない。

そのためには、まず汚染負荷の流入を検知し、さらにその地点がどこかを特定しなければならない。汚染負荷の検知は、(7)式より明らかなように負荷入力 $p(x)$ があるかないかで判定できる。(7) 式で $p(x) \equiv 0$ とおいたときの状態量を $z_f(x)$ と表記し、それに対する (7) 式と (8) 式で構成されるカルマンフィルタによる推定値を $\hat{z}_f(x_k)$ とすれば、負荷の検知は

$$v(x_k) = y(x_k) - H\hat{z}_f(x_k) \quad (11)$$

が予め設定した閾値を超えるかどうかで判定できる。(11) 式の右辺第 2 項は、負荷の流入がないと仮定したときの状態量 $z_f(x_k)$ の推定値であるから、もし実際に負荷があるとすれば推定値 $\hat{z}_f(x_k)$ は真値 $z(x_k)$ より大きくずれ、 $v(x_k) = H\{z(x_k) - \hat{z}_f(x_k)\} + v(x_k)$ の右辺第 1 項は大きくなり、したがって $v(x_k)$ も大きくなる。このことによって負荷の検知が行えることになる。この $\{v(x_k)\}$ の変化を注視することによって負荷流入地点の特定が可能になる。(11) 式のような過程をイノベーション過程と呼ぶ⁵⁾。

4. 負荷量 p_0 の同定と水質の推定

観測値から未知入力 p_0 を同定する問題は一種の逆問題 (inverse problem) であるが、システム制御理論の言葉でいえば、システムに介在する未知パラメータの同定問題である。システムに不規則雑音が入り込まない場合には、状態推定器 (オブザーバ) を構成して未知パラメータを同定する方法が種々提案されているが、いずれもそのアルゴリズムは非常に複雑である。筆者はカルマンフィルタをベースに、未知入力を同定する手法を開発した。そのアイデアは、未知入力そのものは直接に観測しているわけではないので一般的にはそのパラメータに関しては可観測性の条件は成り立たない。すなわち (そのままでは) どのようにしても未知パラメータの同定は不可能である。例え可観測であったとしても、その推定精度は悪い。筆者のアイ

デアは、この未知パラメータを ($L(x)$ や $D(x)$ と同じように) ひとつの状態量と考え、これをあたかも観測して得たかのようなデータを、観測データ $\{y(x_k)\}$ から生成しようというものである。このような観測データ (これを擬似観測値 [pseudomeasurement] と呼ぶ) が生成できれば、未知パラメータに対して可観測性は当然成り立つ。

以下では、紙幅の都合上ポイント負荷の場合についてのみ述べる。負荷の大きさ p_0 は一定であるから、これを $p_0(x)$ と表記すれば

$$\frac{dp_0(x)}{dx} = g_3 \gamma_p \quad (x > 0) \quad (12)$$

と表現できる。本来この右辺は零とすべきであるが、不確定要素を含んでいると考えるのが自然であるのと、未知パラメータを不規則雑音 $\gamma_p(x)$ によって変動を与える方が同定しやすいことからこのようなモデルを用いる。そこで拡大状態量ベクトル $z_0(x) = [z^T(x), p_0(x)]^T$ ($= [L(x), D(x), p_0(x)]^T$) を定義し、(7), (12) 式よりつぎの拡大システムを構成する。

$$\frac{dz_0(x)}{dx} = A_0 z_0(x) + b_0 + G_0 \gamma_0(x) \quad (13)$$

ここで、 $\gamma_0(x) = [\gamma^T(x), \gamma_p(x)]^T$,

$$A_0 = \begin{bmatrix} A & b_2 \delta(x - \hat{x}_{in}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_0 = \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$G_0 = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & g_3 \end{bmatrix}$$

であり、 \hat{x}_{in} は前章で特定した x_{in} の推定値である。デルタ関数 $\delta(x - \hat{x}_{in})$ は十分小さな $\Delta x (> 0)$ によって

$$\delta(x - \hat{x}_{in}) \cong \frac{1}{\Delta x} \{u_S(x - \hat{x}_{in}) - u_S(x - \hat{x}_{in} - \Delta x)\} \quad (14)$$

で近似する。

さて、 p_0 に関する観測データの生成であるが、これは以下のようにする。(5) 式に注目し、この解を求めると

$$L(x) = L(x_0) e^{J_1(x-x_0)} - \frac{1}{k_0} J_1 p_0 e^{J_1(x-x_{in})} u_S(x - x_{in}) + \{\text{noise}\} \quad (15)$$

が得られる。ここで、 $x_0 (< x)$ は $x_0 < \hat{x}_{in}$ となるよう

な任意の地点であり、{noise} (5) 式の雑音に関する項を表す。この式より p_0 を求めると ($x_{in} \leq x$ に対して)

$$p_0 = \frac{k_0}{J_1} \left\{ L(x_0) e^{-J_1(x_0-x_{in})} - L(x) e^{-J_1(x-x_{in})} \right\} + \{\text{noise}\} \quad (16)$$

の関係式を得る。もし、この式の右辺の $L(x)$ と x_{in} がわかれば p_0 は (雑音分は除外して) 原理的に得られることになる。そこで、 p_0 の同定を行うために、この式を用いることにする。

観測地点 $x = x_k$ (ただし $x \geq \hat{x}_{in}$) における観測データ $y_L(x_k)$ を ($L(x_k)$ の代わりに) 用いて

$$p_0(x_k) = \frac{1}{h_1} \frac{k_0}{J_1} e^{-J_1(x_0-\hat{x}_{in})} \{y_L(x_0) - e^{-J_1(x_k-x_0)} y_L(x_k)\} + \{\text{noise}\} \quad (17)$$

と表現する。ここで、右辺第1項は既知量であるから、それを $y_p(x_k)$ として、(17) 式を書き直すと $x_k \geq \hat{x}_{in}$ に対して

$$y_p(x_k) = p_0(x_k) + v_p(x_k) \quad (18)$$

の表現を得る。 $v_p(x_k)$ は (17) 式右辺の {noise} 項とは関係なく表記したものである。(18) 式は、 $v_p(\cdot)$ を観測雑音と考えると、 $y_p(\cdot)$ があたかも未知量 $p_0(\cdot)$ を観測して得たデータであるかのような表現になっている。そこで、 $y_0(x_k) = [y^T(x_k), y_p(x_k)]^T$ ($= [y_L(x_k), y_D(x_k), y_p(x_k)]^T$) とすると、(8) 式に代って

$$y_0(x_k) = H_0 z_0(x_k) + v_0(x_k) \quad (19)$$

を得る。ここで、 $H_0 = \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ であり、 $v_0(x_k)$ は3次元の正規性白色雑音である。

上述のように新しく導入した観測値 $y_p(\cdot)$ が擬似観測値である。擬似観測値をどのように導入すればよいのかについては特に決まった方法はないが、前述のように、直接的には測定データが得られない物理量を推定 (同定) したいときに、その物理量が支配される法則 (例えば、そのダイナミクス) や拘束条件式などを、観測者がその事実を (当然成り立っているものとして) “観測している” とみなすことが有効である。

5. シミュレーション例

図-1 ~ 3 がシミュレーションの1例である。シミュレーションでは全長 120 km 程度の河川を想定し、河川の特性を示すパラメータを $\varepsilon = 50$, $U =$

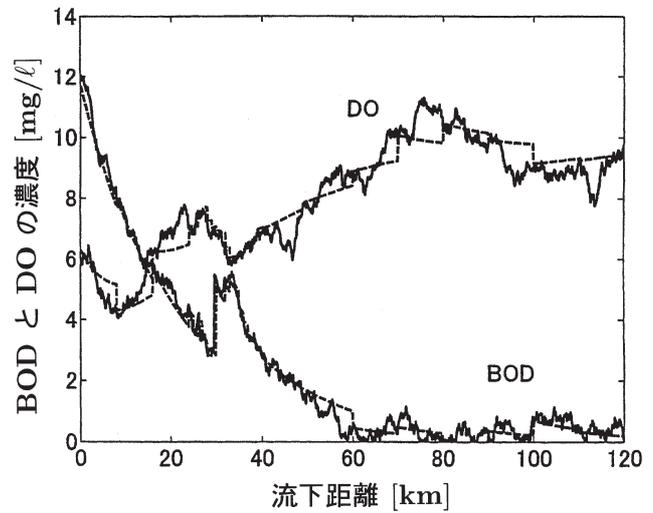


図-1 BODとDOのプロフィールとそれらの推定の様子

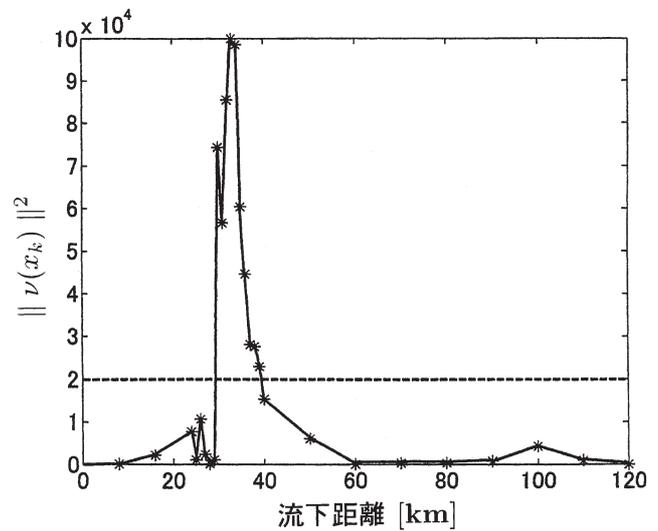


図-2 負荷流入地点の特定

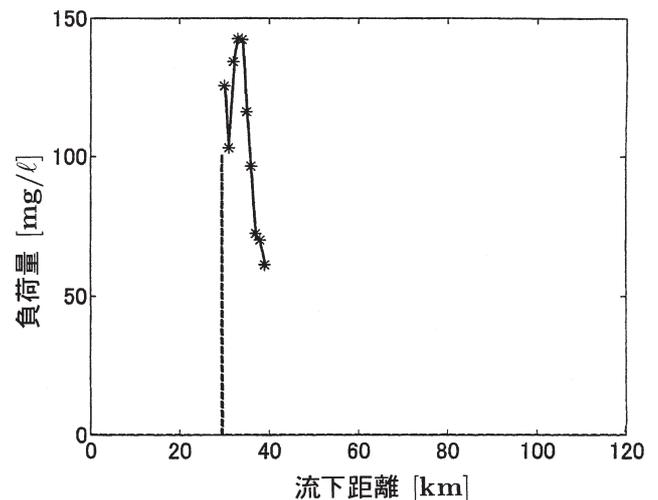


図-3 負荷量 p_0 の同定結果

43.2, $k_1 = 0.4$, $k_2 = 0.6$, $k_3 = 0.05$, $a = 0.5$, $g_1 = g_2 = 1.2$, $L_0 = 12$, $D_0 = 3$, $DO_{sat} = 9.0$ とした。また

$x_{in} = 29.5$ [km] において大きさ $p_0 = 100$ [mg/l] の負荷を受けるとし、負荷のありそうな区域を [25, 40] と予想してその間では観測データを 1 km おきに、それ以外では 10 km おきとした。 $h_1 = h_2 = 100$ とした。

図—1 は BOD と DO の推定の様子を示したもので、それぞれの真値を実線で、推定値を破線で示している。それぞれよく推定できている様子がみてとれる。図—2 は (12) 式のイノベーション過程の自乗値 $\|v(x_k)\|^2 = v^T(x_k) v(x_k)$ の振舞いを示したものであり、 $x = 30$ [km] あたりで急激に大きな値をとり、例えば閾値を 2×10^4 と設定すれば負荷流入地点は $\hat{x}_{in} = 29.3$ [km] と特定される。図—3 は未知負荷量 p_0 の同定の様子を示したもので、雑音の影響によってばらつきがみられるが、それらを平均すれば $p_0 = 106.6$ [mg/l] で p_0 の真値に近い値を与えており、よく同定できていることがわかる。

6. おわりに

本稿では、システム制御理論的なアプローチを河川の BOD と DO の推定および水質事故や不法投棄などによる汚染負荷の場所の特定とその量の同定問題に応用した例を述べた。ここでは比較的取り組みやすい河川の水質推定問題についてのみの議論であるが、筆者のみるところではここで議論した推定・同定問題に

対してこれまでほとんど考察されてこなかったように思われる。環境問題に限らず個々の問題を数理的に整理し、何が本質的な問題であるかが鮮明になれば、これまでシステム工学やシステム制御理論などで開発されてきている様々なアプローチを有効に用いることができるかと確信している。

環境対策について、現場あるいは産業界と大学の研究室との研究交流の場が今ほど求められているときにはないように思われる。 JICMA

《参考文献》

- 1) A. Ohsumi, M. Kashiwagi, M. Watanabe, and T. Takatsu: Estimation of Self-Purification of Polluted Rivers Based on the Stable Water Quality Equations, *Int. J. Innovative Computing, Information and Control*, **2** [5], pp.959-970 (2006)
- 2) 柏木正隆・大住見・渡邊雅彦・高津知司：汚染河川の自然浄化の解析、強化および推定：システム工学的アプローチ、計測自動制御学会論文集, **42** [11], pp.1234-1243 (2006)
- 3) 大住見・小見山資朗・渡邊雅彦・柏木正隆・高津知司：河川の汚染負荷量とその流入地点の同定および水質推定：擬似観測量の導入によるアプローチ、計測自動制御学会論文集, **43** [5], pp.408-417 (2007)
- 4) J. M. Gundelach and J. E. Castillo: Natural Stream Purification under Anaerobic Condition, *J. of WPCF*, **48** [7], pp.1753-1758 (1976)
- 5) 大住見：確率システム入門，朝倉書店，東京（2001）
- 6) 片山徹：新版 応用カルマンフィルタ，朝倉書店，東京（2000）

〔筆者紹介〕

大住 見（おおすみ あきら）
 宮崎大学工学部情報システム工学科
 教授（専門：システム制御理論，信号処理）
 京都工芸繊維大学名誉教授
 京都大学工学博士

